

1 Gruppe

Eine Gruppe ist eine Menge G von Elementen mit einer Verknüpfung \circ , mit den Eigenschaften:

1. **Abgeschlossenheit:** Sind a und b Elemente aus G , so ist auch $a \circ b$ aus G .
2. **Assoziativität:** $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
3. **Neutrales Element:** Es existiert ein Element e (auch 1 genannt) in G , so dass für alle Elemente gilt $a \circ e = e \circ a = a$.
4. **Inverses Element:** Zu jedem Element a in G existiert ein Element, nenne es a^{-1} , so dass $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.
5. Ist zusätzlich noch die folgende Bedingung erfüllt, so spricht man von einer abelschen oder kommutativen Gruppe: $a \circ b = b \circ a$.

Eine Gruppe, die von einem einzigen Element erzeugt wird, heißt **zyklisch**. Dann gilt für die Gruppe G , daß $G = \langle g \rangle = \{i \cdot g \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ (bei additiven Gruppen) bzw. $G = \langle g \rangle = \{g^i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ (bei multiplikativen Gruppen)

2 Ring

Ein Ring ist eine Menge R von Elementen mit zwei Verknüpfungen \oplus , \otimes , und den Eigenschaften:

1. (R, \oplus) ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
2. \otimes ist assoziativ
3. **Distributivität:** Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ und $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

Neutrales Element der Multiplikation ist nicht unbedingt vorhanden.

3 Körper

Ein Körper ist eine Menge K von Elementen mit zwei Verknüpfungen \oplus , \otimes , und den Eigenschaften:

1. (K, \oplus) ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
2. $(K \setminus \{0\}, \otimes)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.
3. **Distributivität:** Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ und $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.