Aufgaben 1

1. Zeige, daß $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper ist. Welches der Gruppenaxiome bzgl. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist nicht erfüllt?

2. Finde die Inversen (erst bzgl. Addition, dann bzgl. Multiplikation) aller Elemente von $\mathbb{F}_5$.

3. Zeige, daß $\mathbb{F}_6$ $(= (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}), +, \cdot)$ kein Körper ist. (Tipp: Besitzen alle Elemente ein multiplikatives Inverses?)

4. Mache Dir an Beispielen klar (oder versuche zu beweisen), daß Modulo-Rechnen multiplikativ ist. Zeige also, daß gilt: $a \cdot b \mod z = (a \mod z) \cdot (b \mod z) \mod z$

5. Beispiel zum chinesischen Restsatz: Sei $p = 5$, $q = 7$. Finde $N \in \mathbb{F}_{35}$ mit $N \equiv 4 \mod 7$ und $N \equiv 0 \mod 5$. Ist dieses N eindeutig bestimmt?

6. Überprüfe den kleinen Satz von Fermat für $\mathbb{F}_5$.

7. Beweise den chinesischen Restsatz in der folgenden Formulierung: Falls $N \equiv x \mod p$ und $N \equiv x \mod q$ (p, q teilerfremd), so gilt $N \equiv x \mod pq$.